



Étude paramétrique des effets d'instabilités des structures minces composites par la méthode des éléments finis : flambage des plaques FRP (A parametric study of the effects of instability for thin composite structures by the finite element method: buckling of FRP plates)

Mohammed EL YOUBI^{1*}, Mohamed ROUGUI², Taoufik TBATOU¹

¹ Laboratoire Energétique, Matériaux et Environnement (LEME), EST Salé – CEDOC Ecole Mohammadia d'ingénieurs, Université Mohammed V Rabat-Maroc.

² Laboratoire Energétique, Matériaux et Environnement (LEME), EST Salé Université Mohammed V Rabat-Maroc.

Received 14 Oct 2014, Revised 14 Jul 2015, Accepted 14 Jul 2015

**Corresponding Author. E-mail: elyoubi1983@yahoo.fr*

Abstract

The analysis of buckling behavior for orthotropic laminated composite plates is important factors in safe and reliable design of the aircraft components and civil structures. The aim of the current research is to investigate the critical buckling load (N_x , c_r) for reinforced (FRP) plates. The loads depends on many parameters like as geometric aspect ratio (a/b), laminate thickness (t), orientation of fiber layers and boundary conditions. The effects of these variables on critical buckling load of the laminated plate were analyzed using finite element software (ANSYS 14.5). It was found that for the analysis of laminated plates simply supported in all edges (S-S-S-S), the optimum orientation of the fiber layers is: $[90/45/-45]$ s degrees for all thicknesses with aspect ratio of 1.0 and 2.0. However, the critical buckling loads increase with increasing aspect ratio and of course with increasing plate thickness.

Keywords: Laminated Plate, Buckling, Finites Elements, Composites, ANSYS

Résumé

L'analyse du comportement de flambage des plaques composites orthotropes stratifiées est une étape très importante dans la conception sûre et fiable des composants des structures civiles et aéronautiques. L'objectif de cet article est d'étudier la charge critique de flambage (N_x, c_r) des plaques renforcées de fibres (FRP). Cette charge dépend d'un certain nombre de variables, à savoir le rapport d'aspect géométrique (a/b), l'épaisseur du stratifié (t), l'orientation des fibres des couches qui forment le stratifié $[90/\theta/-\theta]$ s et les conditions aux limites ; les effets de ces variables sur la variation de la charge critique du flambage des stratifiées ont été analysées à l'aide d'un logiciel d'analyse par éléments finis (ANSYS 14.5). On a constaté que pour l'analyse des plaques stratifiées simplement appuyées (S-S-S-S). L'orientation optimale des fibres des couches était : $[90/45/-45]$ s degrés pour toutes les épaisseurs avec des rapports d'aspects géométriques de 1,0 et 2,0. Les charges critiques de flambage augmentent avec l'augmentation du rapport d'aspect et bien sûr avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque.

Mots clés : Plaques Multicouches, Flambage, Éléments Finis, Composites, ANSYS

1. Introduction

Les plaques composites stratifiées sont largement utilisées dans les applications d'ingénierie du fait de leur excellent rapport résistance/poids et les possibilités de contrôle des propriétés structurales avec la variation des orientations des fibres et le nombre des lames (fig. 1). Cependant, dans de telles applications, le phénomène de flambage est souvent observé en raison de la faible épaisseur des plaques composites laminées. Ce phénomène est dangereux pour les éléments des structures, car le flambage des plaques composites se produit généralement sous une contrainte appliquée inférieure et génère de grandes déformations.

De nombreux travaux de recherche ont été menés concernant le flambage des plaques composites isotropes utilisant différentes méthodes analytiques approximatives ou numériques, et ce depuis le début des travaux de Chu et Herrmann [1]. Un ensemble complet de références peuvent être trouvées dans le livre de Chia [2], ainsi que dans d'excellentes « reviews » de la littérature [3-6].

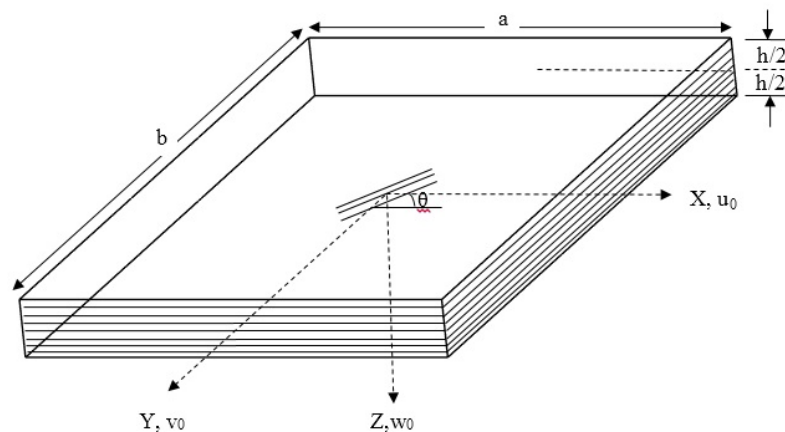


Figure 1 : Configuration d'une plaque multicouche

Chattopadhyay et Gu [7] ont présenté une solution de l'élasticité exacte du flambage d'une plaque orthotrope simplement appuyée. Gu et Chattopadhyay [8] ont proposé des solutions d'élasticité tridimensionnelles pour le flambage des plaques laminées composites orthotropes et simplement appuyées. Shukla et Nath [9] ont analysé le comportement de flambage et post-flambage des plaques laminées rectangulaires composites d'épaisseur moyenne. Khdeir [10] a étudié la stabilité des plaques laminées antisymétriques. Kamruzzaman et al [11] ont étudié le comportement de flambage des plaques rectangulaires stratifiés composites antisymétriques soumis à compression uniaxiale

Un examen détaillé de la littérature montre que malgré le nombre considérable des travaux de recherches effectués sur le flambage des plaques composites, une étude paramétrique détaillée pour identifier la meilleure configuration et le type de composite pour des applications spécifiques est nécessaire.

L'objectif du présent travail est de contribuer aux études de recherche citées plus haut pour l'identification de la meilleure configuration d'un composite donné en vue d'atteindre une plus grande résistance de flambage pour une plaque orthotrope rectangulaire stratifiée simplement appuyée sous compression uni-axiale.

L'étude a en outre été étendue avec le nombre de composites disponibles pour trouver le type le plus efficace de composite contre le flambage pour une configuration donnée des plaques stratifiées. A cet effet, une formulation théorique basée sur les hypothèses de Kirchhoff a été considérée pour l'estimation de la charge critique du flambage des plaques composites stratifiées orthotropes. Sur la base de cette formulation un code de calcul plus puissant (ANSYS) a été utilisé pour atteindre les objectifs ci-dessus.

2. Modélisation d'une plaque multicouche

2.1 Relations cinématiques

Selon la théorie classique des stratifiés basée sur la théorie de Kirchhoff [12] Le champ du déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - zw, x \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - zw, y \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

u_0, v_0, w_0 : Sont les déplacements du plan moyen d'une plaque.

Le champ des grandes déformations [12-13] est donné par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + zk_x \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + zk_y \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{xy}^0 + zk_{xy} \end{aligned} \quad (2)$$

Avec :

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y^0 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\varepsilon_{xy}^0 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \times \frac{\partial w}{\partial y}, \quad k_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

2.2 Loi de comportement

Selon la théorie classique des stratifiées, les forces et les moments sont liés aux déformations à mi-plan et aux courbures par la relation matricielle suivante [12] :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

En notant par σ_i les contraintes dans le plan (xy), alors :

$$N_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i dz \quad \text{Et} \quad M_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_i z dz \quad (4)$$

Les rigidités extensionnelles, de couplage et de flexion d'un stratifié, sont définies par :

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{ij} dz \quad B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{ij} z dz \quad D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \overline{Q}_{ij} z^2 dz \quad (5)$$

Avec Q_{ij} sont les coefficients d'élasticité d'une couche dans le repère global (x, y, z) du stratifié. L'énergie potentielle de déformation de l'élément est donnée par [13] :

$$U = \frac{1}{2} \iint (\{ \varepsilon_l^0 \}^T [A] \{ \varepsilon_l^0 \} + \{ \varepsilon_l^0 \}^T [B] \{ k \} + \{ k \}^T [B] \{ \varepsilon_l^0 \} + \{ k \}^T [D] \{ k \} + \{ \varepsilon_{nl}^0 \} [N]) dx \quad (6)$$

Où

$$\{ \varepsilon_l^0 \}^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \quad \{ \varepsilon_{nl}^0 \}^T = \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, 2 \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right\}$$

$$\{ k \}^T = \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \quad \{ N \}^T = \{ N_x, N_y, N_{xy} \}$$

2.3 Flambage des plaques multicouches

Les valeurs analytiques des charges critiques de flambage d'une plaque stratifiée symétrique, orthotrope et simplement appuyée sous chargement uni-axiale (fig. 2), sont données par la formule de Jones [14] suivante :

$$(N_x)_{cr} = \frac{\pi^2 D_{22}}{b^2} \left[m^2 \frac{D_{11}}{D_{22}} \left(\frac{b}{a} \right)^2 + 2 \left(\frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{22}} \right) + \frac{1}{m^2} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] \quad (7)$$

Où (m) est le nombre de demi-ondes de la forme flambée (mode propre de flambage) suivant (x)

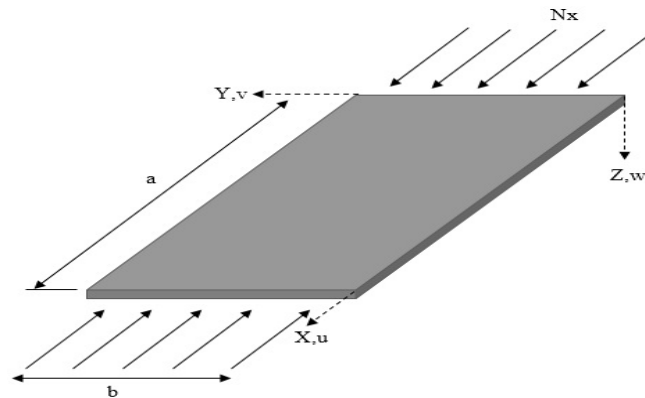


Figure 2 : Plaque rectangulaire sous compression uni-axiale

3. Résultats numériques et discussion

ANSYS a été utilisé pour analyser la charge critique de flambage de différentes plaques stratifiées afin de voir comment les changements dans la plaque laminée affecteraient la charge de flambage. Les modifications apportées à la plaque laminée étaient basées sur trois variables : l'épaisseur (t), le rapport d'aspect géométrique (a/b) et l'orientation des couches. Les plaques stratifiées ont été analysées sous les conditions aux limites simplement appuyées (S-S-S-S), trois épaisseurs différentes (t) ont été utilisées : 0.23, 0.355 et 0.48 in. Quatre rapports d'aspect différents (a/b) ont été considérés : 1.0, 1.2, 1.5 et 2.0. La longueur (a), a été maintenue constante à (6 in) et la largeur (b), a été variée entre 6 in, 5 in, 4 in et 3 in. L'orientation de mat $[90 / +\theta / -\theta]_s$ avait été considérée respectivement : $\theta = 15, 30, 45$ et 60 degrés. Les combinaisons de chacune de ces variables ont été analysées pour une plaque stratifiée constituée de 6 couches en utilisant ANSYS.

L'élément utilisé pour les plaques stratifiées est "SHELL181" qui est adapté à l'analyse des structures minces (plaques et coque) à moyennement épaisses. C'est un élément à quatre nœuds (fig.3) avec six degrés de liberté à chaque nœud : trois translations et trois rotations autour des axes (x, y, z). Les propriétés mécaniques d'anisotropie des couches de la plaque sont données au tableau 1.

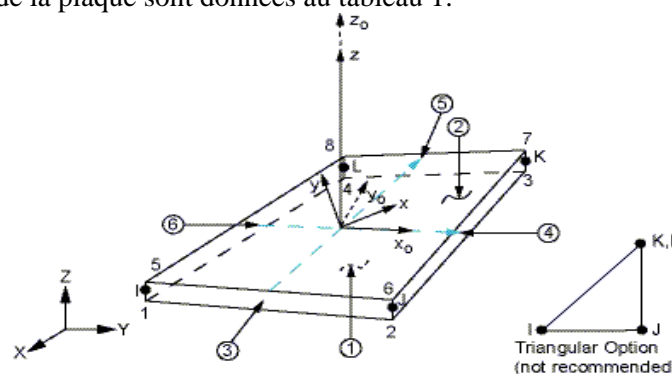


Figure 3: Element Shell 181 (ANSYS Element Reference)

Tableau 1 : Propriétés mécaniques d'une plaque multicouches en E-glass/ époxy

Propriete mecanique	Valeur
E_1	5.49E+006 Psi
E_2	9.53E+005 Psi
E_3	9.53E+005 Psi
$G_{12}=G_{13}$	3.47E+005 Psi
$\nu_{12}=\nu_{13}$	0.3001
$\nu_{23}=\nu_{32}$	0.3001

Les tableaux 2 et 3, montrent les résultats obtenus des charges critiques de flambage à l'aide de l'équation (7) et ANSYS pour différents angles d'orientations, différents épaisseurs et différents rapports d'aspects géométriques d'une plaque stratifiée simplement appuyée (S-S-S-S). Il est à constater que les résultats ont été obtenus avec une

bonne rapidité de convergence de l'élément " Shell 181 " et une bonne précision par rapport aux résultats analytiques avec un écart allant de -1.07% à 31.32 %. Cependant et comme prévu, les plaques épaisses de (0,48 in), ont donné une erreur de pourcentage élevé ($E_{r, \max} = 31.32 \%$) et cela dû à l'augmentation du rapport d'aspect géométrique (a/b) et l'épaisseur (t) (les plaques épaisses), cette comparaison a prouvé la fiabilité de ANSYS avec une grande efficacité.

Tableau 2 : Forces critiques de flambage de la plaque multicouche pour [90/15/-15] s et [90/30/-30] s, Simple-Simple-Simple-Simple

Dimensions de la plaque				Nx, cr (kip/in)			
a(in)	b(in)	a/ b	t (in)	Résultats Analytiques [réf 12]		ANSYS	
				[90/15/-15] s	[90/30/-30] s	[90/15/-15] s	[90/30/-30] s
6.00	6.00	1.00	0.230	02.314	02.509	02.399	02.553
6.00	5.00	1.20	0.230	03.261	03.610	03.479	03.692
6.00	4.00	1.50	0.230	05.622	06.279	05.408	05.930
6.00	3.00	2.00	0.230	09.254*	10.036*	09.102*	09.672*
6.00	6.00	1.00	0.355	08.507	09.226	08.582	09.116
6.00	5.00	1.20	0.355	11.990	13.275	12.069	13.021
6.00	4.00	1.50	0.355	20.674	23.088	22.130	24.110
6.00	3.00	2.00	0.355	34.029*	36.903*	30.340*	32.067*
6.00	6.00	1.00	0.480	21.029	22.805	20.455	21.677
6.00	5.00	1.20	0.480	29.639	32.815	29.579	30.115
6.00	4.00	1.50	0.480	51.105	57.073	46.879	45.300
6.00	3.00	2.00	0.480	84.118*	91.221*	66.331*	65.747*

(*) Ces valeurs correspondent au deuxième mode de flambage, m = 2.

Tableau 3: Forces critiques de flambage de la plaque multicouche pour [90/45/-45] s et [90/60/-60] s, Simple-Simple-Simple-Simple

Dimensions de la plaque				Nx, cr (kips/in)			
a(in)	b(in)	a/ b	t (in)	Résultats Analytiques [réf 12]		ANSYS	
				[90/45/-45]s	[90/60/-60] s	[90/45/-45] s	[90/60/-60] s
6.00	6.00	1.00	0.230	02.607	02.509	02.635	02.376
6.00	5.00	1.20	0.230	03.825	03.822	03.676	03.611
6.00	4.00	1.50	0.230	06.560*	06.090*	05.851*	05.743*
6.00	3.00	2.00	0.230	10.427*	10.036*	09.944*	08.697*
6.00	6.00	1.00	0.355	09.585	09.226	09.403	08.368
6.00	5.00	1.20	0.355	14.164	14.054	12.869	12.675
6.00	4.00	1.50	0.355	24.123*	22.392*	24.276*	21.430*
6.00	3.00	2.00	0.355	38.339*	36.903*	30.684*	28.647*
6.00	6.00	1.00	0.480	23.693	22.805	22.038	19.543
6.00	5.00	1.20	0.480	35.013	34.740	30.681	30.059
6.00	4.00	1.50	0.480	59.631*	55.352*	50.670*	45.734*
6.00	3.00	2.00	0.480	94.773*	91.221*	69.229*	65.082*

(*) Ces valeurs correspondent au deuxième mode de flambage, m = 2.

La figure 4 montre le champ des vecteurs déplacements W des deux modes de flambages (m=1 et m=2) d'une plaque(S-S-S-S) et de dimensions : $6*6 \text{ in}^2$, $t=0.23 \text{ in}$, avec une séquence d'empilement de [90/45/-45] s. Pour le premier mode (m=1), la charge critique maximale de flambage est obtenue pour l'empilement [90/45/-45] s, égale à : $N_x, cr = 2.635 \text{ kip/in}$. Pour le deuxième mode (m=2), la charge critique maximale de flambage est obtenue pour l'empilement [90/15/-15] s, égale à : $N_x, cr = 3.201 \text{ kip/in}$.

La figure 5 illustre le champ des vecteurs déplacements W des deux modes de flambages (m=1 et m=2) d'une plaque(S-S-S-S) d'un empilement [90/30/-30] et d'épaisseur ($t=0.23 \text{ in}$) pour différents rapports d'aspects géométriques (a/b=1.2,1.5,2), la charge critique maximale de flambage est obtenue pour (a/b = 1.5) est d'une valeur : $N_x, cr = 05.930 \text{ Kip/in}$ (m=1).

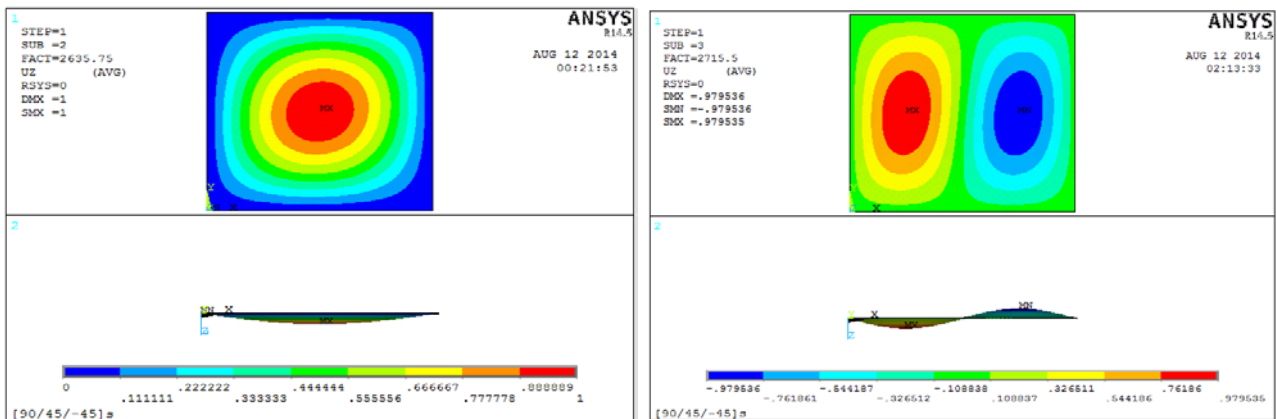


Figure 4 : Champ des vecteurs déplacements W des deux premiers modes de flambages d'une plaque(S-S-S-S) $6*6$ ($a/b=1$), in^2 , $t=0.23$ in, $[90/45/-45]$ s.

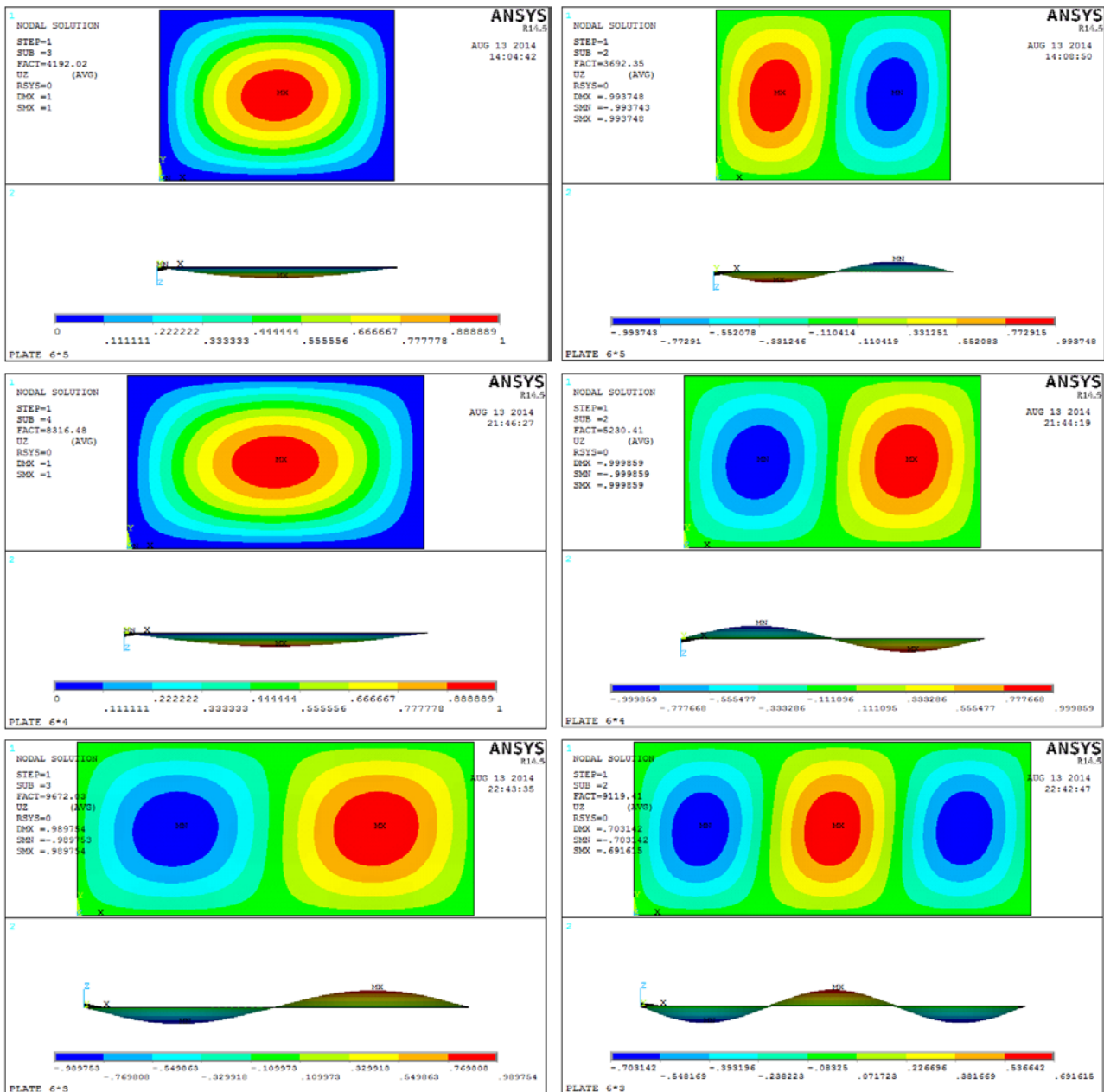


Figure 5 : Champ des vecteurs déplacements W des deux premiers modes de flambages ($m=1$ et $m=2$) d'une plaque(S-S-S-S) d'un empilement $[90/30/-30]$ et d'épaisseur : $t=0.23$ in pour différents rapports d'aspects géométriques ($a/b=1.2, 1.5, 2$)

L'effet de l'orientation des fibres de renforcement sur la charge critique de flambage est illustré dans la figure 6.

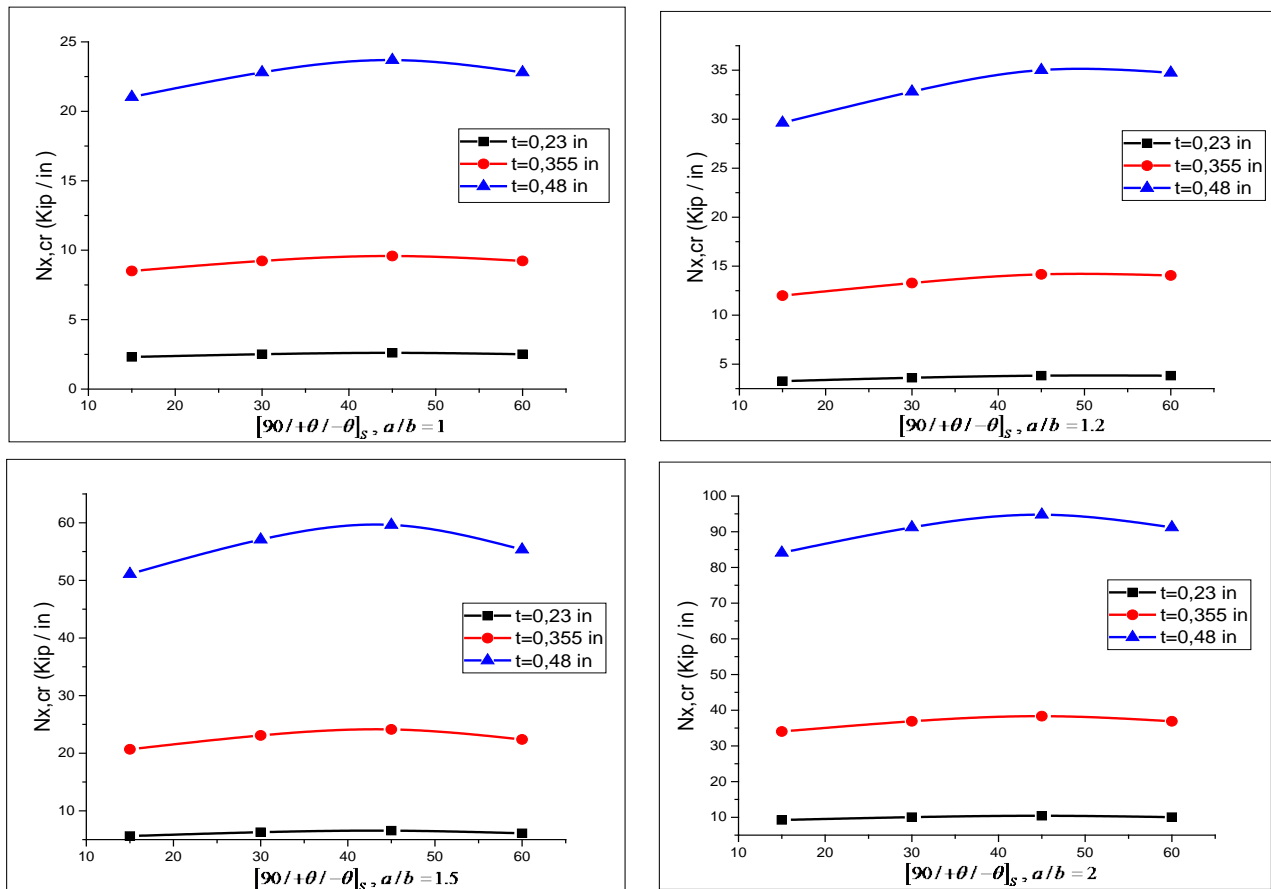


Figure 6 : Variation de la charge critique de flambage (ANSYS (Nx)cr) par rapport aux angles d'orientation des fibres pour a/b = 1, 1.2 , 1.5 , 2

On peut remarquer que la plus grande charge de flambage pour toutes les épaisseurs avec des rapports d'aspect de 1,0 ; 1,2 et 2,0 est obtenue pour les plaques stratifiées en appui simple (SSSS), avec une séquence d'empilement de [90/+45 /-45]s, et pour un rapport d'aspect de 1,5 , les plaques stratifiées avec un empilement orientées de [90/+60 /-60] ont donné la plus grande charge de flambage pour toutes les épaisseurs considérées. Les charges critiques de flambage augmentent avec l'augmentation du rapport d'aspect et bien sûr avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque comme le montre la figure 7.

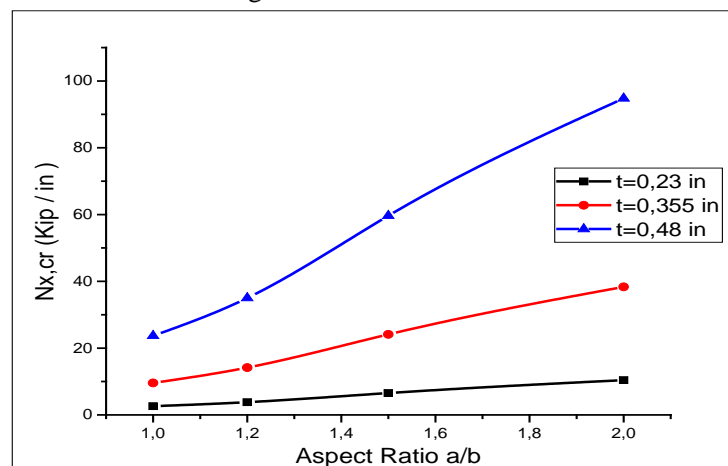


Figure 7 : Variation de la charge critique de flambage (ANSYS (Nx)cr) d'une plaque [90/45/-45] pour différents épaisseurs t=0.23,0.355,0.48 in

La charge de flambage semble insensible aux changements des angles d'orientation pour les plaques à faibles épaisseurs, ce qui justifie pourquoi les courbes $N_{x,cr} = f(\theta)$ (figure 6) apparaissent presque plates pour le flambage des plaques avec ($t=0.23$ in).

4. Conclusion

Lors de cette étude une modélisation numérique du comportement de flambage des plaques stratifiées composites a été réalisée. Les effets des angles d'orientation des fibres de renforcement, du rapport d'aspect géométrique, de l'épaisseur de la plaque et des conditions aux limites, sur la résistance mécanique au flambage étaient étudiés. Les valeurs maximales analytiques et numériques des charges critiques de flambage ont été obtenues pour les plaques avec une séquence d'empilement [90/45/-45]_s. Il s'en suit que la charge de flambage reste insensible aux changements des angles d'orientation pour les plaque à faibles épaisseurs. Pour tous les cas étudiés, les charges critiques de flambage augmentent avec l'augmentation du rapport d'aspect (a/b) et avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque.

La comparaison des résultats trouvés avec ceux d'autres travaux de recherches montrent qu'ils sont en bon accord et ont montré la rapidité de la convergence de l'élément "Shell 181" et sa précision par rapport aux résultats analytiques.

Références

1. Chu H.N., Hermann G., Influence of large amplitudes on free flexural vibrations of rectangular elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* 23, pp 532-540. (1956).
2. Chia C.Y., Geometrically non-linear behavior of composite plates. *Applied Mechanics Reviews* 4, pp 439-45. (1988).
3. Timoshenko S.P., Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill. New York. (1961).
4. Chia C.Y., Nonlinear Analysis of Plates. McGraw-Hill. New York. (1980).
5. Sathyamoorthy M., Non-linear vibrations of plates-a review. *Shock and Vibration digest* 15, pp 3-16. (1983).
6. Sathyamoorthy M., Non-linear vibrations analysis of plates. *Applied Mechanics reviews* 40, pp 1553-1561. (1987).
7. Chattopadhyay A., Gu H., Exact elasticity solution for buckling of composite laminates. *Composite Structures* 34 (3), pp 291-299. (1996).
8. Gu H., Chattopadhyay A., Three-dimensional elasticity solution for buckling of composite laminates. *Composite Structures* 50, pp 29-35. (2000).
9. Shukla K.K., Nath Y., Analytical solution for buckling and post-buckling of angle-ply laminated plates under thermo mechanical loading. *International Journal of Non-Linear Mechanics* 36, pp 1097-1108. (2001).
10. Khdeir A.A., Stability of antisymmetric angle-ply laminated plates. *Journal of Engineering Mechanics* 445 (5), pp 952-963. (1989).
11. Kamruzzaman M., Naqvi S.Q.A., Umar A., Siddiqui N.A., Buckling behavior of rectangular antisymmetric laminated plates. Department of Civil Engineering. Aligarh Muslim University. (2005).
12. Berthelot J.M., Matériaux composites. Edition TEC ET DOC. Paris. 3^{ème} édition.
13. Lien-Wen Chen., Lei-Yi Chen, Thermal buckling analysis of laminated cylindrical plates by the finite element method. *Computer and structures* 34(01), pp 71-78. (1989).
14. Jones R.M., *Mechanics of Composite Materials*. Taylor & Francis. Philadelphia. PA. (1999).
15. ANSYS, Theory Reference Manual, and ANSYS Element Reference.

(2015); <http://www.jmaterenvironsci.com>